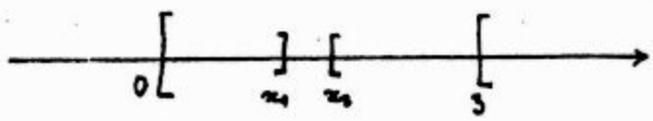
CHAPITRE III

FONCTIONS CONTINUES

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété suivante: $\forall\ x_1,\ x_2 \in I,\ ]x_1,x_2[\ \subset I$. L'ensemble $I = [0,3[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ car si $x_1, x_2 \in I$, $]x_1,x_2[\ \subset [\ 0,3\ [$:



Par contre, l'ensemble $I = [\ 0,3\ [\ \cup\ [\ 4,5]$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$. Car $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{9}{2}$ appartiennent à I mais $]1,\frac{9}{2}[\ \not\subset$ n'est pas inclu dans I (faire un schéma).

Dans tous ce chapitre I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Définition et propriétés :

Définitions : *Soient une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'es-à-dire

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in I:\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in I:\ x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

ETUSUP .com

$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in I : x_0-\eta < x \leq x_0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

- *f est dite continue sur I si elle est continue en tou point de I.*

L'ensemble de ces fonctions est noté $C(I)$.

Exemples : $f(x) = \sin x$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

En effet, $|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right|$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

(car $\left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 1$ et $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta = \varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ entraine $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Proposition : *f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

Démonstration : Résulte du fait que :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On peut exprimer la continuité en terme de suites:

Proposition : *f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset I$, telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$, on a :* $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

Démonstration: On utilise le théorème du chapitre II qui donne le lien entre les limites des suites et les limites des fonctions en prenant $l = f(x_0)$.

ETUSUP .com

Remarque : Pour montrer qu'une fonction f n'est pas continue en un point x_0, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0, telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Exercice : On pose $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f n'est pas continue en 0.

Proposition : *Soient* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en $x_0 \in I$. Alors les fonctions $f + g$; fg , $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $|f|$ sont continues au point x_0.

Démonstration : Elle résulte des propriétés des limites des fonctions (voir chapitre 2).

Proposition (continuité de la fonction composée)

Soient $f: I \longrightarrow I'$ *et* $g: I' \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* I *et* I' *deux intervalles de* $\mathbb{R}$.

Si f *est continue en* $x_0 \in I$ *et* g *continue en* $y_0 = f(x_0)$, *alors* $h = g \circ f$ *est continue en* x_0.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que : $|x-x_0| < \eta \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

g est continue en $y_0 = f(x_0)$. Il existe donc $\eta' > 0$ tel que $\forall y \in I'$: $|y-y_0| < \eta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

f est continue en x_0. On peut donc associer à ce $\eta' > 0$ un nombre $\eta'' > 0$ tel que $\forall x \in I$: $|x-x_0| < \eta'' \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \eta'$. Par suite $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ dès que $|x-x_0| < \eta''$. On prend $\eta = \eta''$.

ETUSUP .com

Exercice :Etudier la continuité de $f(x) = E(x)$, puis la continuité de $h(x) = E(\sqrt{x})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

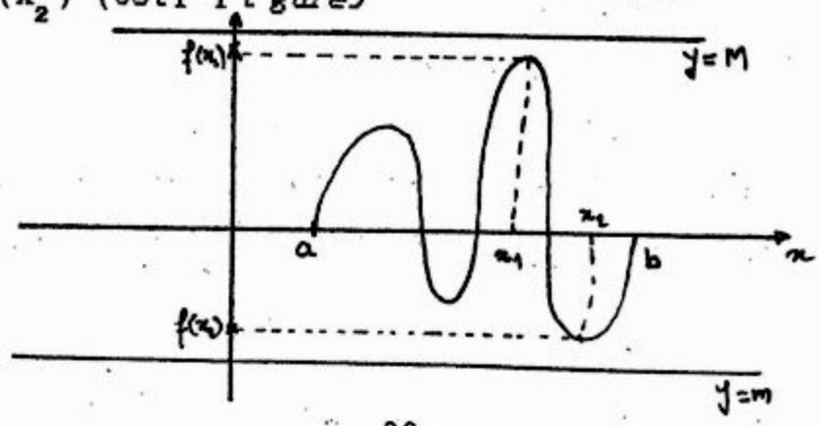
Prolongement par continuité : Soit f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors la fonction f définie sur I par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est continue sur I et coincide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$. On l'appelle prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple: Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = \frac{\sin x}{x}$. f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$ car $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice Montrer que les fonctions $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ et $g(x) = \cos \frac{1}{x}$ ne sont pas prolongeables par continuité au point 0.

Terminons ce paragraphe avec le théorème fondamentale suivant:

Théorème : *Toute fonction f continue sur un intervalle fermé [a,b] est bornée et atteint sa borne supérieure et inférieure, c'est-à-dire* $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ *tels que:* $\sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$ et $\inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$ *(voir figure)*



ETUSUP .com

Par définition: $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \sup \{ f(x) \ / \ x \in [a,b] \}$.

$\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \inf \{ f(x) \ / \ x \in [a,b] \}$

Exemples : 1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

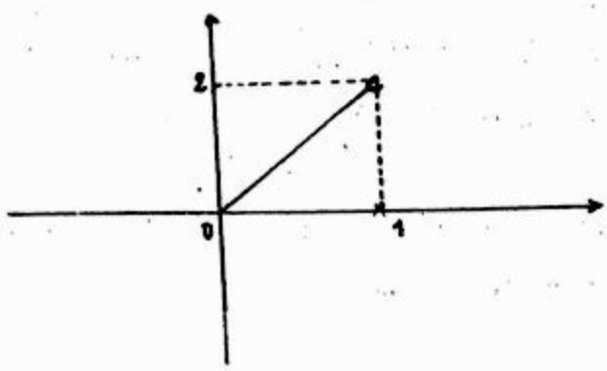
$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f n'est pas borné sur [0,1]

f n'est pas continue en 0 .

2) $f : [0,1[\xrightarrow[x \to f(x) = 2x]{} \mathbb{R}$ f est continue bornée sur [0,1[,mais sa borne supérieure qui est le nombre 2, n'est pas atteint en un point de [0,1 [. Elle est atteint en $x_1 = 1$.

L'intervalle [0,1 [n'est pas fermé .



ETUSUP .com

2) <u>Théorème des valeurs intermédiaires-Conséquences</u> :

<u>Théorème</u> : <u>(des valeurs intermédiaires)</u>

Soient une fonction $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et α un nombre compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $C \in]a,b[$ tel que $\alpha = f(C)$.

<u>Exemple</u> : 1) Montrons que l'équation $x^{111} + x + 1 = 0$ admet une racine réelle comprise entre -1 et 1 . On considère :

$f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x^{111} + x + 1$

f est continue sur $[-1,1]$; $f(-1) = (-1)^{111} < 0$ et $f(1) = 3 > 0$.

On a $f(-1) < 0 < f(1)$. Donc 0 est une valeur intermédiaire. D'après le théorème précédent il existe $C \in]-1,1[$ tel que $f(C) = 0$, c'est-à-dire $C^{111} + c + 1 = 0$. C est la racine cherchée.

2) soit $g: [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in]0,3] \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -2 & \text{si } x \in [-3,0[\end{cases}$$

g n'est pas continue en 0.

g ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires car $g(-3) < 0 < g(3)$, mais $g(c) \neq 0 \quad \forall c \in]-3,3[$

<u>Exercice</u> : Soit $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a).f(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

ETUSUP .com

Théorème :(de la fonction réciproque)

Soit f: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante . Alors f est une application bijective de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ et admet une fonction réciproque f^{-1} de $[f(a),f(b)]$ sur $[a,b]$ qui est continue et strictement croissante.

Remarque : On a un énoncé analogue avec f continue strictement décroissante , quitte à prendre $[f(b),f(a)]$ au lieu de $[f(a),f(b)]$.

Démonstration du théorème :

Montrons que $f: [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ est bijective .

. f est injective: Soient x_1, $x_2 \in [a,b]$ tels que $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.Sinon $x_1 > x_2$, ce qui entraine $f(x_1) > f(x_2)$ car f est strictement croissante. Impossible !

. f est surjective : $f([a,b]) \overset{?}{=} [f(a), f(b)]$.

$x \in [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow$ $f(x) \in [f(a),f(b)] \Rightarrow f([a,b]) \subseteq [f(a),f(b)]$. Inversement si $y \in [f(a), f(b)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$. Par suite $y \in f([a,b])$ c'est-à-dire $[f(a),f(b)] \subset f([a,b])$.

. f^{-1}: $[f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$ est strictement croissante.

En effet, soient Z_1, $Z_2 \in [f(a),f(b)]$ tels que $Z_1 < Z_2$. Alors $f^{-1}(Z_1) < f^{-1}(Z_2)$, sinon $f^{-1}(Z_1) \geq f^{-1}(Z_2)$, par suite $f[f^{-1}(Z_1)] \geq f[f^{-1}(Z_2)]$(car f est croissante), c'est-à-dire $Z_1 \geq Z_2$. Impossible .

La démonstration de f^{-1} continue sera admise.

ETUSUP .com

Exemple : La fonction $f: [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \xrightarrow[x \to \sin x]{} \mathbb{R}$ est continue strictement croissante Donc f est bijective de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vers $[\sin(-\frac{\pi}{2}),\sin\frac{\pi}{2}] = [-1,1]$.Sa fonction réciproque f^{-1} est notée Arcsin x

$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \longrightarrow f^{-1}(x) = \text{Arc sin } x.$$

Définition : *Soit $f: I \to \mathbb{R}$.*

$x_0 \in I$ est dit un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$.

Par exemple $x_0 = 1$ est un point fixe de $f(x) = x^2 + x - 1$ car $f(1) = 1$.

Théorème : (du point fixe)

Soit une fonction $f: [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
(Graphiquement cela veut dire que la courbe de f rencontre la droite $y = x$)

Démonstration : Soit $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x) - x.$$

g est continue sur [a,b].

Si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ le point fixe sera $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. Supposons $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$. $f(a) > a$ et $f(b) < b$ car f est à valeurs dans [a,b]. Par suite $g(b) < 0 < g(a)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires entraine l'existence de $x_0 \in]a,b[$ tel que $g(x_0) = 0$ c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Exercice : Montrer que la fonction $f(x) = \cos x$ admet un point fixe appartenant à [-1,1].

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..